

© 2017 Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

571211

Man bestimme alle reellen Zahlen $z \leq 100\,000$, für die positive ganze Zahlen m und n existieren, die die zwei Gleichungen

$$z - n^2 = m^4, \tag{1}$$

$$(n + 1)^2 - z = 2^m \tag{2}$$

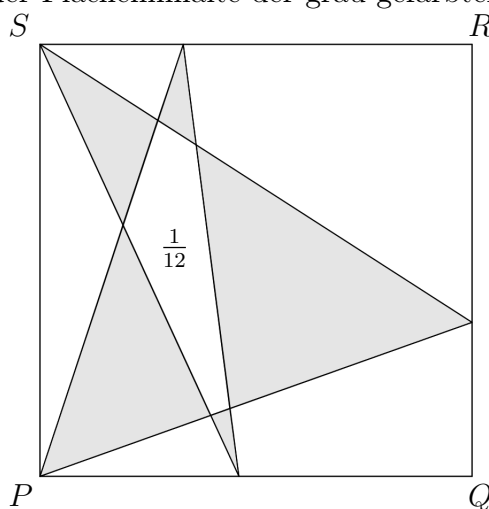
erfüllen.

571212

Die Ecken eines fünfzackigen Sterns liegen so auf den Seiten eines Quadrates $PQRS$ mit der Seitenlänge 1, dass zwei Ecken des Sterns mit den Eckpunkten P und S übereinstimmen und im Inneren der Kanten \overline{PQ} , \overline{QR} und \overline{RS} jeweils ein weiterer Eckpunkt des Sterns liegt, siehe Abbildung A 571212.

Der Flächeninhalt des mittleren Fünfecks beträgt $1/12$.

Man berechne die Summe der Flächeninhalte der grau gefärbten Dreiecke.



A 571212

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

571213

Für drei positive reelle Zahlen a, b, c gelte $a \leq b \leq c$ und $a \cdot b \cdot c = 1$.

Man beweise, dass dann a und c die Ungleichung

$$(a + 1)(c + 1) > 3$$

erfüllen.

571214

In einem Quadrat mit der Seitenlänge 2017 liegen 10 000 Punkte.

- a) Man beweise, dass es einen Kreis mit dem Durchmesser 100 gibt, in dessen Innerem mindestens 12 dieser Punkte liegen.
- b) Man beweise, dass es sogar einen Kreis mit dem Durchmesser 100 gibt, in dessen Innerem mindestens 15 der Punkte liegen.